

幕墙立柱内力和挠度的快速算法

蔡杰民 (上海杰思工程实业有限公司)

郭 毓 (上海大学)

摘要 本文推导了建筑幕墙立柱的内力和挠度方程,给出了相应的最大值计算式,并据此编制了内力和挠度计算系数表,可方便、快捷地运用于建筑幕墙立柱的结构计算。

关键词 建筑幕墙 立柱 内力 挠度 计算系数表

建筑幕墙按其施工方法可分为单元式幕墙和构件式幕墙^[1]。单元式幕墙通过相邻单元组件的上、下框,或左、右框对插形成组合横梁和立柱,因此其上、下立柱之间的连接应视为铰接。构件式幕墙上、下立柱之间采用芯柱连接,当芯柱插入上、下立柱的长度小于立柱截面高度的两倍,或芯柱惯性矩小于立柱惯性矩时,上、下立柱之间的连接可按铰接处理^[2]。因此,单元式幕墙和上述构件式幕墙立柱的计算模型可简化为受均布荷载作用的多跨铰接梁。

通常,一项建筑幕墙工程中的大部分幕墙立柱可接受均布荷载作用的等跨等截面铰接梁计算。本文推导了接受均布荷载作用、五等跨等截面铰接梁处理的建筑幕墙立柱(以下简称幕墙立柱)的内力和挠度方程及其最大值计算式,并据此编制了内力和挠度计算系数表,可方便地用于幕墙立柱的结构计算。

1 幕墙立柱的内力和挠度方程及其最大值

幕墙立柱的计算简图如图 1 所示。

设均布荷载为 q , 悬跨比 $\lambda = c/l$, 荷载效应的符号及正负号定义如下:

R — 支座反力, 作用方向向上者为正;

V — 剪力, 对邻近截面所产生的力矩沿顺时针方向者为正;

M — 弯矩, 使截面上部受压、下部受拉者为正;

w — 挠度, 向下变位者为正。

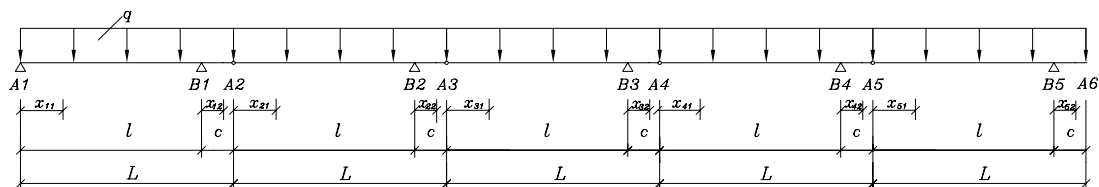


图 1 幕墙立柱计算简图

由力和力矩平衡方程,可推导出各支座处反力和各铰接点剪力:

$$\begin{aligned}
R_{A1} &= \frac{1}{2}ql(1 - \lambda + \lambda^5 - \lambda^6); & R_{B1} &= \frac{1}{2}ql(2 + 2\lambda - \lambda^4 + \lambda^6); \\
R_{B2} &= \frac{1}{2}ql(2 + 2\lambda + \lambda^3 - \lambda^5); & R_{B3} &= \frac{1}{2}ql(2 + 2\lambda - \lambda^2 + \lambda^4); \\
R_{B4} &= \frac{1}{2}ql(2 + 3\lambda - \lambda^3); & R_{B5} &= \frac{1}{2}ql(1 + \lambda)^2; \\
V_{A2} &= \frac{1}{2}ql(1 - \lambda - \lambda^4 + \lambda^5); & V_{A3} &= \frac{1}{2}ql(1 - \lambda + \lambda^3 - \lambda^4); \\
V_{A4} &= \frac{1}{2}ql(1 - \lambda - \lambda^2 + \lambda^3); & V_{A5} &= \frac{1}{2}ql(1 - \lambda^2);
\end{aligned}$$

各段梁的弯矩方程如下:

$$\begin{aligned}
\text{A1-B1 段: } M(x_{11}) &= -\frac{1}{2}q[x_{11}^2 - l(1 - \lambda + \lambda^5 - \lambda^6)x_{11}] & (0 \leq x_{11} \leq l) \\
\text{B1-A2 段: } M(x_{12}) &= -\frac{1}{2}q[(c - x_{12})^2 + l(1 - \lambda - \lambda^4 + \lambda^5)(c - x_{12})] & (0 < x_{12} \leq c) \\
\text{A2-B2 段: } M(x_{21}) &= -\frac{1}{2}q[x_{21}^2 - l(1 - \lambda - \lambda^4 + \lambda^5)x_{21}] & (0 \leq x_{21} \leq l) \\
\text{B2-A3 段: } M(x_{22}) &= -\frac{1}{2}q[(c - x_{22})^2 + l(1 - \lambda + \lambda^3 - \lambda^4)(c - x_{22})] & (0 < x_{22} \leq c) \\
\text{A3-B3 段: } M(x_{31}) &= -\frac{1}{2}q[x_{31}^2 - l(1 - \lambda + \lambda^3 - \lambda^4)x_{31}] & (0 \leq x_{31} \leq l) \\
\text{B3-A4 段: } M(x_{32}) &= -\frac{1}{2}q[(c - x_{32})^2 + l(1 - \lambda - \lambda^2 + \lambda^3)(c - x_{32})] & (0 < x_{32} \leq c) \\
\text{A4-B4 段: } M(x_{41}) &= -\frac{1}{2}q[x_{41}^2 - l(1 - \lambda - \lambda^2 + \lambda^3)x_{41}] & (0 \leq x_{41} \leq l) \\
\text{B4-A5 段: } M(x_{42}) &= -\frac{1}{2}q[(c - x_{42})^2 + l(1 - \lambda^2)(c - x_{42})] & (0 < x_{42} \leq c) \\
\text{A5-B5 段: } M(x_{51}) &= -\frac{1}{2}q[x_{51}^2 - l(1 - \lambda^2)x_{51}] & (0 \leq x_{51} \leq l) \\
\text{B5-A6 段: } M(x_{52}) &= -\frac{1}{2}q(c - x_{52})^2 & (0 < x_{52} \leq c)
\end{aligned}$$

式中的 x_{ij} ($i = 1, 2 \dots 5; j = 1, 2$) 如图 1 所示。根据剪力与弯矩之间的关系

$V(x) = dM(x)/dx$ ^[5], 可得各段梁的剪力方程, 此处不再赘述。

由上述弯矩方程, 进而可得各段梁的最大弯矩:

$$\text{A1-B1 段: } M_{\max} = \frac{(1 - \lambda + \lambda^5 - \lambda^6)^2}{8}ql^2 = K_1ql^2 \quad (\text{在 A1-B1 段中部}) \quad (1)$$

$$\text{B1-A2 段: } M_{\max} = -\frac{\lambda(1 - \lambda^4 + \lambda^5)}{2}ql^2 = K_{B1}ql^2 \quad (\text{在支座 B1 处}) \quad (2)$$

$$\text{A2-B2 段: } M_{\max} = \frac{(1 - \lambda - \lambda^4 + \lambda^5)^2}{8}ql^2 = K_2ql^2 \quad (\text{在 A2-B2 段中部}) \quad (3)$$

$$\text{B2-A3 段: } M_{\max} = -\frac{\lambda(1 + \lambda^3 - \lambda^4)}{2}ql^2 = K_{B2}ql^2 \quad (\text{在支座 B2 处}) \quad (4)$$

$$\text{A3-B3 段: } M_{\max} = \frac{(1 - \lambda + \lambda^3 - \lambda^4)^2}{8} ql^2 = K_3 ql^2 \quad (\text{在 A3 - B3 段中部}) \quad (5)$$

$$\text{B3-A4 段: } M_{\max} = -\frac{\lambda(1 - \lambda^2 + \lambda^3)}{2} ql^2 = K_{B3} ql^2 \quad (\text{在支座 B3 处}) \quad (6)$$

$$\text{A4-B4 段: } M_{\max} = \frac{(1 - \lambda - \lambda^2 + \lambda^3)^2}{8} ql^2 = K_4 ql^2 \quad (\text{在 A4 - B4 段中部}) \quad (7)$$

$$\text{B4-A5 段: } M_{\max} = -\frac{\lambda(1 + \lambda - \lambda^2)}{2} ql^2 = K_{B4} ql^2 \quad (\text{在支座 B4 处}) \quad (8)$$

$$\text{A5-B5 段: } M_{\max} = \frac{(1 - \lambda^2)^2}{8} ql^2 = K_5 ql^2 \quad (\text{在 A5 - B5 段中部}) \quad (9)$$

$$\text{B5-A6 段: } M_{\max} = -\frac{\lambda^2}{2} ql^2 = K_{B5} ql^2 \quad (\text{在支座 B5 处}) \quad (10)$$

式中的 K_i ($i=1, 2 \cdots 5$), K_{Bj} ($j=1, 2 \cdots 5$) 均是悬跨比 λ 的函数。

根据 $d^2y/dx^2 = M(x)/EI$ [5], 以及在支座处梁挠度为零的边界条件和梁的连续性条件, 对

上述弯矩方程积分, 可得各段梁的挠度方程:

A1-B1 段:

$$w(x_{11}) = \frac{q}{24EI} [x_{11}^4 - 2l(1 - \lambda + \lambda^5 - \lambda^6)x_{11}^3 - U_1x_{11}] \quad (0 \leq x_{11} \leq l)$$

$$\text{式中: } U_1 = -l^3(1 - 2\lambda + 2\lambda^5 - 2\lambda^6)$$

B1-A2 段:

$$w(x_{12}) = \frac{q}{24EI} [(x_{12} - c)^4 - 2l(1 - \lambda - \lambda^4 + \lambda^5)(x_{12} - c)^3 - S_1x_{12} - T_1] \quad (0 < x_{12} \leq c)$$

$$\text{式中: } S_1 = l^3(1 - 4\lambda - 6\lambda^2 + 2\lambda^3 + 4\lambda^5 + 2\lambda^6 - 6\lambda^7); \quad T_1 = l^4\lambda^3(2 - \lambda - 2\lambda^4 + 2\lambda^5)$$

A2-B2 段:

$$w(x_{21}) = \frac{q}{24EI} [x_{21}^4 - 2l(1 - \lambda - \lambda^4 + \lambda^5)x_{21}^3 - U_2x_{21} - V_2] \quad (0 \leq x_{21} \leq l)$$

$$\text{式中: } U_2 = -l^3(1 - \lambda - 4\lambda^2 - 4\lambda^3 - \lambda^4 + 2\lambda^5 + 4\lambda^6 - 4\lambda^8); \quad V_2 = l^4\lambda(\lambda + 1)(1 - 5\lambda + \lambda^2 + 4\lambda^5 - 4\lambda^6)$$

B2-A3 段:

$$w(x_{22}) = \frac{q}{24EI} [(x_{22} - c)^4 - 2l(1 - \lambda + \lambda^3 - \lambda^4)(x_{22} - c)^3 - S_2x_{22} - T_2] \quad (0 < x_{22} \leq c)$$

$$\text{式中: } S_2 = l^3(1 - 5\lambda - 2\lambda^2 + 6\lambda^3 - 5\lambda^4 - 2\lambda^5 + 2\lambda^6 + 4\lambda^8); \quad T_2 = l^4\lambda^3(2 - \lambda + 2\lambda^3 - 2\lambda^4)$$

A3-B3 段:

$$w(x_{31}) = \frac{q}{24EI} [x_{31}^4 - 2l(1 - \lambda + \lambda^3 - \lambda^4)x_{31}^3 - U_3x_{31} - V_3] \quad (0 \leq x_{31} \leq l)$$

$$\text{式中: } U_3 = -l^3(1 - \lambda - 5\lambda^2 + 2\lambda^3 + 3\lambda^4 - 5\lambda^5 + 4\lambda^9); \quad V_3 = l^4k(1 - 5\lambda + 5\lambda^3 - 5\lambda^4 + 4\lambda^8)$$

B3-A4 段:

$$w(x_{32}) = \frac{q}{24EI} \left[(x_{32} - c)^4 - 2l(1 - \lambda - \lambda^2 + \lambda^3)(x_{32} - c)^3 - S_3 x_{32} - T_3 \right] \quad (0 < x_{32} \leq c)$$

$$\text{式中: } S_3 = l^3(1 - 5\lambda - \lambda^2 + 6\lambda^3 - 3\lambda^4 - \lambda^5 - 4\lambda^9); \quad T_3 = l^4\lambda^3(2 - \lambda - 2\lambda^2 + 2\lambda^3);$$

A4-B4 段:

$$w(x_{41}) = \frac{q}{24EI} \left[x_{41}^4 - 2l(1 - \lambda - \lambda^2 + \lambda^3)x_{41}^3 - U_4 x_{41} - V_4 \right] \quad (0 \leq x_{41} \leq l)$$

$$\text{式中: } U_4 = -l^3(1 - \lambda - 7\lambda^2 + 3\lambda^3 + 5\lambda^4 - 5\lambda^5 + \lambda^6 - 4\lambda^{10}); \quad V_4 = l^4k(-1 + 5\lambda - 5\lambda^2 - 5\lambda^3 + 5\lambda^4 - \lambda^5 + 4\lambda^9)$$

B4-A5 段:

$$w(x_{42}) = \frac{q}{24EI} \left[(x_{42} - c)^4 - 2l(1 - \lambda^2)(x_{42} - c)^3 - S_4 x_{42} - T_4 \right] \quad (0 < x_{42} \leq c)$$

$$\text{式中: } S_4 = l^3(1 - 5\lambda - 5\lambda^2 - \lambda^3 + \lambda^4 + 5\lambda^5 - \lambda^6 + 4\lambda^{10}); \quad T_4 = l^4\lambda^3(2 + \lambda - 2\lambda^2);$$

A5-B5 段:

$$w(x_{51}) = \frac{q}{24EI} \left[x_{51}^4 - 2l(1 - \lambda^2)x_{51}^3 - U_5 x_{51} - V_5 \right] \quad (0 \leq x_{51} \leq l)$$

$$\text{式中: } U_5 = -l^3(1 + \lambda - 7\lambda^2 - 3\lambda^3 - \lambda^5 + 5\lambda^6 - \lambda^7 + 4\lambda^{11}); \quad V_5 = l^4k(1 - 5\lambda - 3\lambda^2 - \lambda^4 + 5\lambda^5 - \lambda^6 + 4\lambda^{10})$$

B5-A6 段:

$$w(x_{52}) = \frac{q}{24EI} \left[(x_{52} - c)^4 - S_5 x_{52} - c^4 \right] \quad (0 < x_{52} \leq c)$$

$$\text{式中: } S_5 = l^3(1 - \lambda + \lambda^2 - \lambda^3 + \lambda^5 - 5\lambda^6 + \lambda^7 - 4\lambda^{11});$$

由上述挠度方程, 进而可得各段梁的最大挠度:

$$\text{A1-B1 段: } w_{\max} = C_1 \frac{ql^4}{100EI} \quad (\text{在 A1 - B1 段中部}) \quad (11)$$

$$\text{B1-A2 段: } w_{\max} = \frac{-ql^4\lambda(1 - 4\lambda - 4\lambda^2 + \lambda^3 + 4\lambda^5 - 4\lambda^7)}{100EI} = C_{A2} \frac{ql^4}{100EI} \quad (\text{在铰接点 A2 处}) \quad (12)$$

$$\text{A2-B2 段: } w_{\max} = C_2 \frac{ql^4}{100EI} \quad (\text{在 A2 - B2 段中部}) \quad (13)$$

$$\text{B2-A3 段: } w_{\max} = \frac{-ql^4\lambda(1 - 5\lambda + 5\lambda^3 - 5\lambda^4 + 4\lambda^8)}{100EI} = C_{A3} \frac{ql^4}{100EI} \quad (\text{在铰接点 A3 处}) \quad (14)$$

$$\text{A3-B3 段: } w_{\max} = C_3 \frac{ql^4}{100EI} \quad (\text{在 A3 - B3 段中部}) \quad (15)$$

$$\text{B3-A4 段: } w_{\max} = \frac{-ql^4\lambda(1 - 5\lambda + \lambda^2 + 5\lambda^3 - 5\lambda^4 + \lambda^5 - 4\lambda^9)}{100EI} = C_{A4} \frac{ql^4}{100EI} \quad (\text{在铰接点 A4 处}) \quad (16)$$

$$\text{A4-B4 段: } w_{\max} = C_4 \frac{ql^4}{100EI} \quad (\text{在 A4 - B4 段中部}) \quad (17)$$

$$\text{B4-A5 段: } w_{\max} = \frac{-ql^4\lambda(1 - 5\lambda - 3\lambda^2 - \lambda^4 + 5\lambda^5 - \lambda^6 + 4\lambda^{10})}{100EI} = C_{A5} \frac{ql^4}{100EI} \quad (\text{在铰接点 A5 处}) \quad (18)$$

$$\text{A5-B5 段: } w_{\max} = C_5 \frac{ql^4}{100EI} \quad (\text{在 A5 - B5 段中部}) \quad (19)$$

$$\text{B5-A6 段: } w_{\max} = \frac{-ql^4\lambda(1-\lambda+\lambda^2+\lambda^5-5\lambda^6+\lambda^7-4\lambda^{11})}{100EI} = C_{A6} \frac{ql^4}{100EI} \quad (\text{在铰接点A6处}) \quad (20)$$

式中的 C_i ($i=1, 2\cdots 5$), C_{A_j} ($j=2, 3\cdots 6$) 均是悬跨比 λ 的函数。

2 幕墙立柱的内力和挠度计算系数表

根据上述内力和挠度方程, 可得到便于工程应用的幕墙立柱弯矩、剪力和挠度计算系数表如表 1 至表 3 所示。

使用表中计算系数及上述公式 (1) ~ (20), 可计算各段梁的最大弯矩、剪力和挠度。

根据幕墙工程的实际情况, 表中悬跨比 $\lambda (=c/l)$ 取值 0~0.2。

表 1 幕墙立柱的最大弯矩计算系数表

悬跨比 λ	跨内最大弯矩计算系数					支座处弯矩计算系数				
	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	K_{B1}	K_{B2}	K_{B3}	K_{B4}	K_{B5}
0	0.1250	0.1250	0.1250	0.1250	0.1250	0	0	0	0	0
0.02	0.1201	0.1200	0.1201	0.1200	0.1249	-0.0100	-0.0100	-0.0100	-0.0102	-0.0002
0.04	0.1152	0.1152	0.1152	0.1148	0.1246	-0.0200	-0.0200	-0.0200	-0.0208	-0.0008
0.06	0.1105	0.1104	0.1105	0.1097	0.1241	-0.0300	-0.0300	-0.0299	-0.0317	-0.0018
0.08	0.1058	0.1058	0.1059	0.1045	0.1234	-0.0400	-0.0400	-0.0398	-0.0429	-0.0032
0.10	0.1013	0.1012	0.1015	0.0992	0.1225	-0.0500	-0.0500	-0.0496	-0.0545	-0.0050
0.12	0.0968	0.0968	0.0971	0.0940	0.1214	-0.0600	-0.0601	-0.0592	-0.0663	-0.0072
0.14	0.0925	0.0924	0.0930	0.0889	0.1201	-0.0700	-0.0702	-0.0688	-0.0784	-0.0098
0.16	0.0882	0.0881	0.0889	0.0837	0.1187	-0.0800	-0.0803	-0.0783	-0.0908	-0.0128
0.18	0.0841	0.0839	0.0850	0.0787	0.1170	-0.0899	-0.0904	-0.0876	-0.1033	-0.0162
0.20	0.0801	0.0797	0.0813	0.0737	0.1152	-0.0999	-0.1006	-0.0968	-0.116	-0.0200

注: 各跨内的最大弯矩和各支座处的弯矩 $M = \text{表中系数} \times ql^2$ 。

表 2 幕墙立柱的剪力计算系数表

悬跨比 λ	剪力计算系数										
	V_{A1}	$V_{B1左}$	$V_{B1右}$	$V_{B2左}$	$V_{B2右}$	$V_{B3左}$	$V_{B3右}$	$V_{B4左}$	$V_{B4右}$	$V_{B5左}$	$V_{B5右}$
0	0.5000	-0.5000	0.5000	-0.5000	0.5000	-0.5000	0.5000	-0.5000	0.5000	-0.5000	0
0.02	0.4900	-0.5100	0.5100	-0.5100	0.5100	-0.5100	0.5098	-0.5102	0.5198	-0.5002	0.02
0.04	0.4800	-0.5200	0.5200	-0.5200	0.5200	-0.5200	0.5192	-0.5208	0.5392	-0.5008	0.04
0.06	0.4700	-0.5300	0.5300	-0.5300	0.5301	-0.5299	0.5283	-0.5317	0.5582	-0.5018	0.06
0.08	0.4600	-0.5400	0.5400	-0.5400	0.5402	-0.5398	0.5371	-0.5429	0.5768	-0.5032	0.08
0.10	0.4500	-0.5500	0.5500	-0.5500	0.5505	-0.5496	0.5455	-0.5545	0.5950	-0.5050	0.10
0.12	0.4400	-0.5600	0.5599	-0.5601	0.5608	-0.5592	0.5537	-0.5663	0.6128	-0.5072	0.12
0.14	0.4300	-0.5700	0.5698	-0.5702	0.5712	-0.5688	0.5616	-0.5784	0.6302	-0.5098	0.14

0.16	0.4200	-0.5800	0.5797	-0.5803	0.5817	-0.5783	0.5692	-0.5908	0.6472	-0.5128	0.16
0.18	0.4101	-0.5899	0.5896	-0.5904	0.5924	-0.5876	0.5767	-0.6033	0.6638	-0.5162	0.18
0.20	0.4001	-0.5999	0.5994	-0.6006	0.6032	-0.5968	0.5840	-0.6160	0.6800	-0.5200	0.20

注：各支座处的剪力 $V = \text{表中系数} \times ql$ 。

表 3 幕墙立柱的最大挠度计算系数表

悬跨比 λ	跨内最大挠度计算系数					铰接点处挠度计算系数				
	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_{A2}	C_{A3}	C_{A4}	C_{A5}	C_{A6}
0	1.3021	1.3021	1.3021	1.3021	1.3021	0	0	0	0	0
0.02	1.2397	1.2014	1.2022	1.2009	1.2636	-0.0765	-0.0750	-0.0750	-0.0749	-0.0817
0.04	1.1774	1.1077	1.1107	1.1056	1.2315	-0.1389	-0.1334	-0.1337	-0.1325	-0.1603
0.06	1.1153	1.0215	1.0277	1.0160	1.2058	-0.1865	-0.1753	-0.1762	-0.1723	-0.2359
0.08	1.0534	0.9429	0.9532	0.9323	1.1866	-0.2183	-0.2008	-0.2029	-0.1936	-0.3088
0.10	0.9918	0.8725	0.8873	0.8543	1.1742	-0.2338	-0.2102	-0.2144	-0.1958	-0.3792
0.12	0.9304	0.8105	0.8300	0.7822	1.1688	-0.2321	-0.2038	-0.2110	-0.1784	-0.4472
0.14	0.8694	0.7576	0.7816	0.7163	1.1709	-0.2127	-0.1819	-0.1933	-0.1406	-0.5131
0.16	0.8088	0.7145	0.7423	0.6568	1.1811	-0.1747	-0.1448	-0.1619	-0.0820	-0.5771
0.18	0.7487	0.6822	0.7126	0.6044	1.2000	-0.1177	-0.0929	-0.1174	-0.0020	-0.6393
0.20	0.6892	0.6620	0.6928	0.5599	1.2286	-0.0410	-0.0267	-0.0603	0.1000	-0.7000

注：各跨内的最大挠度和各铰接点处的挠度 $w = \text{表中系数} \times ql^4 / (100EI)$ 。

3 结论

悬跨比 λ 是影响幕墙立柱内力和挠度的重要因素，分析表明当 $0 \leq \lambda \leq 0.2$ 时，幕墙立柱的内力和挠度呈现下列规律：

- (1) 五跨中的最大弯矩出现在 A5-B5 段；中间三跨中的最大弯矩出现在 A3-B3 段；
- (2) 各支座处的最大剪力出现在支座 B4 的右侧截面处；
- (3) 各铰接点中的最大剪力出现在铰接点 A5 处；
- (4) 五跨中的最大挠度出现在 A5-B5 段；中间三跨中的最大挠度出现在 A3-B3 段。

主要参考文献

- [1] 中华人民共和国行业标准，玻璃幕墙工程技术规范，JGJ 102—2003，中国建筑工业出版社，2003 年 12 月
- [2] 赵西安，建筑幕墙工程手册（上册），中国建筑工业出版社，2002 年 12 月
- [3] 张 芹，玻璃、金属板、石材、点式幕墙技术手册，上海科学技术文献出版社，2001 年 3 月
- [4] 《建筑结构静力计算手册》编写组，建筑结构静力计算手册（第二版），中国建筑工业出版社，1998 年 9 月
- [5] 蔺海荣，材料力学，国防工业出版社，2001 年 10 月